

УДК 519.21

КОМПОЗИЦИЯ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ И ФРАКТАЛЬНЫХ ИНВАРИАНТОВ ПРИ ИДЕНТИФИКАЦИИ СТРУКТУРЫ

БОЛЬШАКОВ В. И.¹, д. т. н., проф.,
ВОЛЧУК В. Н.^{2*}, д. т. н., доц.,
ДУБРОВ Ю. И.³, д. т. н., проф.

¹ Кафедра материаловедения и обработки материалов, Государственное высшее учебное заведение «Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры», ул. Чернышевского, 24-а, Днепро, 49600, Украина, тел. +38 (0562) 47-39-56, e-mail: bolshakov@mail.pgasa.dp.ua, ORCID ID: 0000-0003-0790-6473

^{2*} Кафедра материаловедения и обработки материалов, Государственное высшее учебное заведение «Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры», ул. Чернышевского, 24-а, Днепро, 49600, Украина, тел. +38 (0562) 47-39-56, e-mail: volchuky@gmail.com, ORCID ID: 0000-0001-8717-6786

³ Кафедра материаловедения и обработки материалов, Государственное высшее учебное заведение «Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры», ул. Чернышевского, 24-а, Днепро, 49600, Украина, тел. +38 (0562) 47-39-56, e-mail: mom@mail.pgasa.dp.ua, ORCID ID: 0000-0002-3213-4893

Аннотация. Постановка задачи. Процессы формального представления структуры металла, согласно известной гипотезе С. Уолфрема, описываются только численно неприводимыми алгоритмами, результаты которых невозможно предсказать, не выполнив их полностью. В материаловедении такая сингулярность проявляется при идентификации структуры металла и объясняется ее чувствительностью даже к относительно малым изменениям термодинамических характеристик. Поиск более точного прогноза показателей качества стали привел авторов к учету, кроме названных топологических характеристик структур, размерностных (фрактальных) характеристик. **Результаты и их обсуждение.** Предложен эффективный метод оценки механических свойств металла с применением композиции топологического и фрактального подходов для сотового, пластинчатого, зернистого и игольчатого классов структуры. В его основу положены четыре новых критерия для оценки структуры, полученных с использованием композиции данных подходов, что позволяет уменьшить погрешность при прогнозе характеристик прочности металла в 1,24...2,16 раза в зависимости от его класса. Эти подходы взаимно дополняют друг друга, поскольку представляют дополнительную информацию о влиянии режимов обработки металла на структуру, и, соответственно, на свойства. **Выводы.** Показано, что композиция топологического и фрактального методов дает более точный прогноз, чем каждый из названных подходов в отдельности.

Ключевые слова: топология; теория фракталов; металл; класс структуры; прогноз свойств

КОМПОЗИЦІЯ ТОПОЛОГІЧНИХ І ФРАКТАЛЬНИХ ІНВАРІАНТІВ ДЛЯ ІДЕНТИФІКАЦІЇ СТРУКТУРИ

БОЛЬШАКОВ В. І.¹, д. т. н., проф.,
ВОЛЧУК В. М.^{2*}, д. т. н., доц.,
ДУБРОВ Ю. І.³, д. т. н., проф.

¹ Кафедра металознавства та обробки матеріалів, Державний вищий навчальний заклад «Придніпровська державна академія будівництва та архітектури», вул. Чернишевського, 24-а, Дніпро, 49600, Україна, тел. +38 (0562) 47-39-56, e-mail: bolshakov@mail.pgasa.dp.ua, ORCID ID: 0000-0003-0790-6473

^{2*} Кафедра металознавства та обробки матеріалів, Державний вищий навчальний заклад «Придніпровська державна академія будівництва та архітектури», вул. Чернишевського, 24-а, Дніпро, 49600, Україна, тел. +38 (0562) 47-39-56, e-mail: volchuky@gmail.com, ORCID ID: 0000-0001-8717-6786

³ Кафедра металознавства та обробки матеріалів, Державний вищий навчальний заклад «Придніпровська державна академія будівництва та архітектури», вул. Чернишевського, 24-а, Дніпро, 49600, Україна, тел. +38 (0562) 47-39-56, e-mail: mom@mail.pgasa.dp.ua, ORCID ID: 0000-0002-3213-4893

Анотація. Постановка завдання. Процеси формального представлення структури металу, згідно з відомою гіпотезою С. Уолфрема, описуються тільки чисельно незвідними алгоритмами, результати яких неможливо передбачити, не виконавши їх повністю. У металознавстві така сингулярність проявляється під час ідентифікації структури металу та пояснюється її чутливістю навіть до відносно малих змін термодинамічних характеристик. Пошук більш точного прогнозу показників якості сталі привів авторів до урахування, крім названих топологічних характеристик структур, розмірних (фрактальних) характеристик. **Результати та їх обговорення.** Запропоновано ефективний метод оцінювання механічних властивостей металу із застосуванням композиції топологічного та фрактального підходів для сотового, пластинчатого, зернистого та голчатого класів структури. В його основу покладено чотири нові критерії для оцінювання структури, отримані з використанням композиції даних підходів, що дозволяє зменшити похибку у прогнозі характеристик міцності металу в

1,24...2,16 раз залежно від його класу. Ці підходи взаємно доповнюють один одного, оскільки становлять додаткову інформацію про вплив режимів обробки металу на структуру, і, відповідно, на властивості. **Висновки.** Показано, що композиція топологічного і фрактального методів дає більш точний прогноз, ніж кожен із названих підходів окремо.

Ключові слова: топологія; теорія фракталів; метал; клас структури; прогноз властивостей

COMPOSITION OF TOPOLOGICAL AND FRACTAL INVARIANTS IN THE IDENTIFICATION OF STRUCTURE

BOL'SHAKOV V.I.¹, *Dr. Sc. (Tech.), Prof.*,
VOLCHUK V.M.^{2*}, *Dr. Sc. (Tech.), As. Prof.*,
DUBROV Yu.I.³, *Dr. Sc. (Tech.), Prof.*

¹ Department of Materials Science, State Higher Education Establishment "Pridniprovsk State Academy of Civil Engineering and Architecture", 24-a, Chernyshevskogo str., Dnipro, 49600, Ukraine, tel. +38 (0562) 47-39-56, e-mail: bolshakov@mail.pgasa.dp.ua, ORCID ID: 0000-0003-0790-6473

^{2*} Department of Materials Science, State Higher Education Establishment "Pridniprovsk State Academy of Civil Engineering and Architecture", 24-a, Chernyshevskogo str., Dnipro, 49600, Ukraine, tel. +38 (0562) 47-39-56, e-mail: volchukv@gmail.com, ORCID ID: 0000-0001-8717-6786

³ Department of Materials Science, State Higher Education Establishment "Pridniprovsk State Academy of Civil Engineering and Architecture", 24-a, Chernyshevskogo str., Dnipro, 49600, Ukraine, tel. +38 (0562) 47-39-56, e-mail: mom@mail.pgasa.dp.ua, ORCID ID: 0000-0002-3213-4893

Abstract. Formulation of the problem. The processes of formal representation of the metal structure, according to the well-known hypothesis of S. Wolffrem, are described only by numerically irreducible algorithms, the results of which can not be predicted without completely completing them. In material science, such a singularity manifests itself in the identification of the structure of a metal and is explained by its sensitivity to even relatively small changes in thermodynamic characteristics. The search for a more accurate forecast of steel quality indicators led the authors to take into account the above-mentioned topological characteristics of structures, dimensional (fractal) characteristics. **Results and discussion.** It is proposed an efficacious method of estimation of properties of a metal using a composition of the topological and fractal approaches for the honeycomb, lamellar, granular and acicular class structures. The method is based on four new criteria for the structure estimation that are obtained by combining the above-mentioned approaches. Using this method, the metal strength estimation error is reduced by a factor 1,24...2,16 depending on the metal class. These approaches mutually complement each other, as they provide additional information on the influence of metal processing regimes on the structure, and, accordingly, on the properties. **Conclusions.** It is shown that the composition of topological and fractal methods gives a more accurate prediction than each of these approaches separately from each other.

Keywords: topology; fractal theory; the metal; structure of the class; the forecast properties

Постановка задачи

Ретроспективный анализ публикаций за последние 50 лет, начиная с фундаментальных работ таких ученых как R. T. DeHoff [1], E. E. Underwood [2] и многих других показал, что получение допустимо точных для практических целей моделей прогноза характеристик качества металлов, на основании анализа их структур, неосуществим, из-за невозможности получения допустимо точного изображения их реального вида. Последнее обусловлено тем, что процессы формального представления структуры металла, согласно известной гипотезе С. Уолфрема, описываются только численно неприводимыми алгоритмами, результаты которых невозможно предсказать, не выполнив их полностью. В материаловедении такая сингулярность проявляется при идентификации структуры металла и объясняется ее чувствительностью даже к относительно малым изменениям термодинамических характеристик.

Поиск более точного прогноза показателей качества стали привел авторов к учету, кроме топологических характеристик структур [3], размерностных (фрактальных) характеристик [4–19].

Результаты и их обсуждение

В предлагаемом методе за фрактальный эквивалент структуры сталей принимается фрактальная размерность – D ее элементов (зерен, пластин, игл) в зависимости от исследуемого класса металла. С этой целью введены инварианты для оценки элементов структуры с учетом композиции их топологических и фрактальных характеристик [9].

1. Для учета влияния формы зерна на характеристики стали вводилось отношение диаметра зерна к его фрактальной размерности – *относительный диаметр зерна*:

$$k_D = d / D, \quad (1)$$

где $d = L / N$ – средний диаметр зерна, определяемый как отношение суммарной длины отрезков L к общему числу зерен N , пересеченных этими

отрезками; D – средняя величина фрактальной размерности зерна за Хаусдорфом (4) [20]:

$$D = -\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N(\delta)}{\ln \delta}, \quad (2)$$

где $N(\delta)$ – количество клеток размером δ , покрывших исследуемый объект.

2. Поскольку длина межфазных и внутрифазных границ поликристаллов, включая и межзеренные границы, являющиеся двумерными дефектами, существенно влияет на ряд их механических свойств, вводился коэффициент, отображающий *относительную длину межфазных и внутрифазных границ*:

$$l_D = (l/S)/D, \quad (3)$$

где l – длина межфазных и внутрифазных границ, приходящаяся на единицу площади – S , рассчитываемая с помощью курвиметра; D – фрактальная размерность межфазных и внутрифазных границ. В формуле (3) оценивается “извилистость” границ, которая не учитывается традиционными методами, а оценивается по величине их фрактальной размерности.

3. Разница между реальной структурой и ее топологическим эквивалентом определялась по величине дисперсии зерен. *Форма зерен* отображается в величине дисперсии δ_D , вычисляемой как разница между относительным

диаметром зерна k_D (1) и относительным диаметром ячейки топологического эквивалента k_e :

$$\delta_D = \sqrt{(k_D - k_e)^2} / k_D, \quad (4)$$

где $k_e = d_e / X$, d_e – относительный диаметр ячейки эквивалента, который определяется как наибольшее расстояние между двумя точками на границе зерна; X – размерность ячейки эквивалента на плоскости принимаем равной ее евклидовой размерности. Учет несоответствия реальной структуры стали по сравнению с эталоном производился по формуле (4).

4. Так как внутренняя метрика шлифа является функцией его фрактальной размерности, в ней отображаются характеристики качества стали [5], что характеризуется *метрическим расхождением структуры* с ее топологическим эквивалентом:

$$E_D = \sqrt{\left(\frac{S}{D} - \frac{S_e}{X}\right)^2} / (S/D), \quad (5)$$

где S и D – площадь и фрактальная размерность зерна исследуемой структуры соответственно; S_e – площадь ячейки топологического эквивалента.

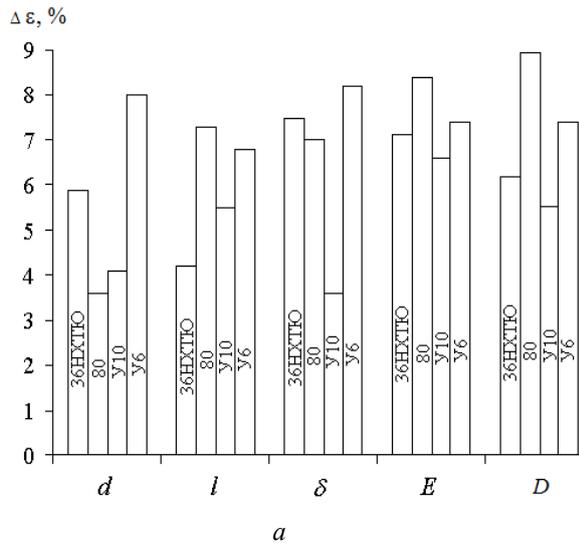
В данной работе проведен сравнительный анализ методов прогноза характеристик качества стали с применением топологического, фрактального подходов и их композиции согласно принятым классам структуры (таблица).

Таблица

Характеристики структуры стали с применением топологического, фрактального подходов и их композиции / Steel structure characteristics using topological, fractal approaches and their composition

Величина	36НХТЮ	Сталь 80		У10	У6
Класс структуры	сотовая	полосчатая		зернистая	игольчатая
Составляющие структуры	аустенит	пластинчатый перлит		зернистый цементит	троостит закалки, мартенсит
Термообработка	нормализация	горячая деформация (ковка и отжиг)		отжиг	закалка с 800 °С в воду
Топологический подход					
Диаметр зерен, d (мкм)	10...16	Феррит	Цементит	2,4...3,1	1,1...1,5
		0,6...1,0	0,8...1,3		
Дисперсия зерен, δ	0,29...0,35	0,10...0,16	0,10...0,15	0,21...0,27	0,34...0,42
Метрическое расхождение, E	0,21...0,27	0,08...0,13	0,09...0,12	0,26...0,34	0,17...0,24
Длина межфазных и внутрифазных границ, l (мм/мм ²)	780...2410	(310...365)·10 ³		(98...174)·10 ³	(92...150)·10 ³
Объемная доля, ω_f	–	0,32	0,68	0,41	–
Фрактальный подход					
Фрактальная размерность, D	1,62...1,94	1,73...1,84	1,71...1,89	1,83...1,98	1,57...1,81
Композиция топологического и фрактального подходов					
Относит. диаметр зерен, k_D (мкм)	5,4...11	0,37...0,64	0,45...0,77	1,31...1,69	0,72...0,93
Дисперсия зерен, δ_D	0,23...0,30	0,12...0,17	0,07...1,1	0,23...0,29	0,20...0,25
Метрическое расхождение, E_D	0,16...0,23	0,07...0,10	0,09...0,14	0,14...0,35	0,06...0,11
Относительная длина межфазных и внутрифазных границ, l_D (мм/мм ²)	415...1440	(168...207)·10 ³		(51...94)·10 ³	(54...89)·10 ³

На графиках рисунка показана относительная погрешность прогноза прочностных характеристик



сталей при заданных выше условиях.

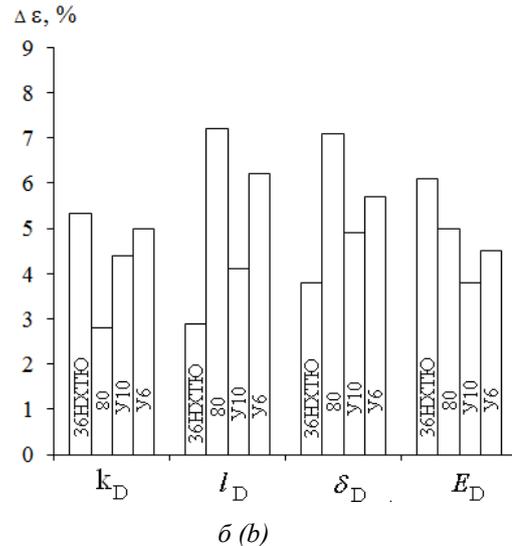


Рис. Относительная погрешность прогноза $\Delta \varepsilon$ предела текучести для сталей 36НХТЮ, 80 и предела прочности для сталей У10, У6 с использованием топологического, фрактального подходов (а) и их композиции (б) / Fig. Relative error of the forecast $\Delta \varepsilon$ yield point for steels 36НХТЮ, 80 and strength limit for steels У10, У6 with use of topological, fractal approaches (a) and their compositions (b)

Из графиков следует, что наилучшая точность прогноза прочности по топологическим характеристикам наблюдается для зернистого класса стали, что можно объяснить тем, что фрактальная размерность элементов структуры этого класса незначительно отличается от евклидовой. Так, для стали У10 точность прогноза показателей прочности составляет 0,94 по сравнению с топологическим подходом, что обусловлено узким диапазоном изменения размерности зернистого перлита – 1,98...2, благодаря округлой форме зерен и, соответственно, низкой чувствительностью фрактального подхода при оценке свойств. Из представленных на рисунке графиков следует, что погрешность при прогнозе прочностных характеристик для сотового, полосчатого и игольчатого классов металла с применением композиции топологического и фрактального подходов ниже в 1,24...2,16 раза.

Последнее можно объяснить тем, что при топологическом подходе учитываются такие геометрические характеристики элементов структуры как их длина, площадь, объем, однако при этом не учитываются другие характеристики структуры, определяемые с применением фрактального подхода. При фрактальном подходе учитываются: разница между формой зерна и его топологическим эквивалентом; “извилистость” границ зерен, которая не фиксируется традиционными методами при оценке показателей качества; дисперсия формы зерен между относительным диаметром зерна и относительным диаметром его топологического эквивалента, а также метрическое расхождение структуры с ее топологическим эквивалентом.

Эти подходы взаимно дополняют друг друга, поскольку представляют дополнительную информацию о влиянии режимов обработки металла на структуру, и, соответственно, на свойства.

Ниже приведены уравнения регрессии для функции определяющего параметра названных выше классов структур с учетом композиции топологического и фрактального подходов (6)–(9), при которых наблюдается наименьшая погрешность.

Для сотовой структуры ($r = 94$):

$$P = x_1 \cdot k_D + x_2 \cdot l_D + x_3 \cdot \delta_D + x_4 \cdot E_D = 40,87 \cdot k_D + 0,27 \cdot l_D + 553,81 \cdot \delta_D - 273,37 \cdot E_D \quad (6)$$

где P – параметр (выбранное к рассмотрению механическое свойство), x_1, x_2, x_3, x_4 – вклад диаметра, длины зерен, дисперсии и метрического расхождения в значение параметра соответственно.

Для полосчатой структуры ($r = 87$):

$$P = \omega_f \cdot (x_1 \cdot k_D + x_2 \cdot l_D + x_3 \cdot \delta_D + x_4 \cdot E_D) + (1 - \omega_f) \cdot (x_1 \cdot k_D + x_2 \cdot l_D + x_3 \cdot \delta_D + x_4 \cdot E_D) = \omega_f \cdot (-151,34 \cdot k_D + 0,005 \cdot l_D - 1012,41 \cdot \delta_D - 964,46 \cdot E_D) + (1 - \omega_f) \cdot (46,71 \cdot k_D + 0,005 \cdot l_D + 104,36 \cdot \delta_D - 969,24 \cdot E_D).$$

Данная формула состоит из двух частей, каждая из которых построена так, как и в предыдущем примере. Величина ω_f указывает процентное содержание феррита в структуре, поэтому является уравнивающим коэффициентом для обеих частей уравнения, показывающих влияние феррита и цементита соответственно.

Для зернистой структуры ($r = 85$):

$$P = \omega_f \cdot (x_1 \cdot k_D + x_2 \cdot l_D + x_3 \cdot \delta_D + x_4 \cdot E_D) = \\ = \omega_f \cdot (-706,33 \cdot k_D + 0,02 \cdot l_D + 1005,48 \cdot \delta_D + \\ + 4612,82 \cdot E_D). \quad (8)$$

В данном уравнении использовался тот же принцип, что и в (9), для определения влияния свойств зерен на определяющий параметр, величина ω_f указывает на количество зерен.

Для игольчатой структуры ($r = 89$) уравнение имеет следующий вид:

$$P = x_1 \cdot k_D + x_2 \cdot l_D + x_3 \cdot \delta_D + x_4 \cdot E_D = \\ = 369,72 \cdot k_D + 0,005 \cdot l_D - 240,64 \cdot \delta_D + 113,09 \cdot E_D \quad (9)$$

Выводы

Таким образом показано, что композиция топологического и фрактального методов дает более точный прогноз, чем каждый из названных подходов в отдельности друг от друга.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Practical Stereology : monograph / [J. C. Russ, R. T. Dehoff]. – New York : McGraw-Hill Book Company, 2000. – 381 p.
2. Underwood E. E. Quantitative Stereology : monograph / [E. E. Underwood]. – Boston : Addison-Wesley, Reading, Pennsylvania, 1970. – 274 p.
3. Большаков В. И. Микроструктура стали как определяющий параметр при прогнозе ее механических характеристик / В. И. Большаков, Ю. И. Дубров, О. С. Касьян // Доповіді НАН України. – 2010. – № 6. – С. 89–96. – Режим доступу : <http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/29839>
4. Mandelbrot B. V. The Fractal Geometry of Nature : monograph / [B. V. Mandelbrot]. – New-York, San Francisco : Freeman, 1982. – 480 p. – Режим доступу : <http://www.amazon.com/Fractal-Geometry-Nature-Benoit-Mandelbrot/dp/0716711869>
5. Большаков В. И. Об оценке применимости языка фрактальной геометрии для описания качественных трансформаций материалов / В. И. Большаков, Ю. И. Дубров // Доповіді НАН України. – № 4. – 2002. – С. 116–121. – Режим доступу : <http://www.dopovidi.nas.gov.ua/>
6. Большаков В. И. Особенности применения мультифрактального формализма в материаловедении / В. И. Большаков, В. Н. Волчук, Ю. И. Дубров // Доповіді НАН України. – 2008. – № 11. – С. 99–107. – Режим доступу : <http://www.dopovidi.nas.gov.ua/2008-11/08-11-17.pdf>
7. Большаков В. И. Фрактальный подход при идентификации сложных систем / В. И. Большаков, В. Н. Волчук, Ю. И. Дубров // Доповіді НАН України. – 2017. – № 6. – С. 46–50. – Режим доступу : <https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.06.00>
8. Большаков Вад. І. Часткова компенсація неповноти формальної аксіоматики при ідентифікації структури металу / Вад. І. Большаков В. І. Большаков, В. М. Волчук, Ю. І. Дубров // Вісник НАН України. – 2014. – № 12. – С. 45–48. – Режим доступу : <http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/73434>
9. Большаков В. И. Топологические и фрактальные инварианты структуры для оценки качества металла / В. И. Большаков, В. Н. Волчук, Ю. И. Дубров // Доповіді НАН України. – 2017. – № 4. – С. 42–48. – Режим доступу : <https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.04.00>
10. Большаков В. И. Материаловедческие аспекты применения вейвлетно-мультифрактального подхода для оценки структуры и свойств малоуглеродистой стали / В. И. Большаков, В. Н. Волчук // Металлофизика и новейшие технологии. – 2011. – Т. 33. – № 3. – С. 347–360.
11. Fractals and properties of materials : monograph / [V. Bol'shakov, V. Volchuk, Yu. Dubrov] – Saarbrücken: Lambert Academic Publishing, 2016. – 140 p. – Режим доступу : <https://www.lap-publishing.com/catalog/details/store/tr/book/978-3-330-01812-9/fractals-and-properties-of-materials?search=Fractals>
12. Пути идентификации периодических многокритериальных технологий : монография / [Ю. Дубров, В. Большаков, В. Волчук]. – Saarbrücken : Palmarium Academic Publishing, 2015. – 236 с. – Режим доступу : <https://www.palmarium-publishing.ru/extern/listprojects>
13. Пути применения теории фракталов : монография / [В. Большаков, В. Волчук, Ю. Дубров]. – Saarbrücken : Palmarium Academic Publishing, 2016. – 146 с. – Режим доступу : <https://www.palmarium-publishing.ru/extern/listprojects>
14. Волчук В. Н. К вопросу о применении теории мультифракталов для оценки механических свойств металла / В. Н. Волчук // Металлознавство та термічна обробка металів. – 2014. – № 3. – С. 12–19. – Режим доступу : <http://mtom.pgasa.dp.ua/article/view/12-19>
15. Большаков В. И. Фракталы в материаловедении : учебное пособие / [В. И. Большаков, В. Н. Волчук, Ю. И. Дубров] – Днепрпетровск : ПГАСА, 2006. – 253 с.
16. Большаков В. И. Материаловедческие аспекты применения частичной компенсации неполноты формальной аксиоматики / В. И. Большаков, В. Н. Волчук, Ю. И. Дубров // Вісник Придніпровської державної академії будівництва та архітектури. – 2015. – № 5. – С. 10–16. – Режим доступу : <http://visnyk.pgasa.dp.ua/article/view/47385/43497>
17. Большаков В. И. Разработка и исследование метода определения механических свойств металла на основе анализа фрактальной размерности его микроструктуры / В. И. Большаков, В. Н. Волчук, Ю. И. Дубров // Металлознавство та термічна обробка металів. – 2004. – № 1. – С. 43–54.
18. Большаков В. И. Исследование микроструктурной однородности стали У8 с применением мультифрактального анализа / В. И. Большаков, В. Н. Волчук // Металлознавство та термічна обробка металів. – 2010. – № 4. – С. 31–38.

19. Большаков В. И. К вопросу о постановке задачи идентификации фрактальной структуры металла / В. И. Большаков, В. Н. Волчук, Ю. И. Дубров // Вісник Придніпровської державної академії будівництва та архітектури. – 2016. – № 5. – С. 35–39. – Режим доступу : <http://visnyk.pgasa.dp.ua/article/view/68905/63995>
20. Hausdorff G. Dimension und auberes Mab / G. Hausdorff // Math. Ann. – 1919. – Vol. 79. – Pp. 157–179. – Режим доступу: <http://gdz.sub.uni-goettingen.de/dms/load/img/?PID=GDZPPN002266989>

REFERENCES

1. Russ J.C. and Dehoff R.T. Practical Stereology. New York : McGraw-Hill Book Company, 2000, 381 p.
2. Underwood E.E. Quantitative Stereology. Boston : Addison-Wesley, Reading, Pennsylvania, 1970, 274 p.
3. Bol'shakov V.I. Dubrov Yu.I. and Kasian O.S. *Mikrostruktura stali kak opredelyayushchiy parametr pri prognoze yeye mekhanicheskikh kharakteristik* [Steel microstructure as a defining parameter in the prediction its mechanical properties]. *Dopovidi Natsionalnoi akademii nauk Ukrainy* [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine]. 2010, no. 6, pp. 89–96. (in Russian).
4. Mandelbrot B.B. The Fractal Geometry of Nature. New-York, San Francisco : Freeman, 1982, 480 p.
5. Bol'shakov V.I. and Dubrov Yu.I. *Ob otsenke primenimosti yazyka fraktal'noj geometrii dlya opisaniya kachestvennykh transformatsiy materialov* [An estimate of the applicability of fractal geometry to describe the language of qualitative transformation of materials]. *Dopovidi Natsionalnoi akademii nauk Ukrainy* [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine]. 2002, no. 4, pp. 116–121. (in Russian).
6. Bolshakov V.I., Volchuk V.N. and Dubrov Yu.I. *Osobennosti primeneniya mul'tifraktal'nogo formalizma v materialovedenii* [Features of the multifractal formalism in materials]. *Dopovidi Natsionalnoi akademii nauk Ukrainy* [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine]. 2008, no. 11, pp. 99–107. (in Russian).
7. Bolshakov V.I., Volchuk V.M. and Dubrov Yu.I. *Fraktal'nyy podkhod pri identifikatsii slozhnykh sistem* [Fractal approach to the identification of complex systems]. *Dopovidi Natsionalnoi akademii nauk Ukrainy* [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine]. 2017, no. 6, pp. 46–50. (in Russian).
8. Bol'shakov Vad.I., Bolshakov V.I., Volchuk V.N. and Dubrov Yu.I. *Chastkova kompensatsiya nepovnoty formal'noyi aksiomatyky pry identyfikatsiyi struktury metalu* [The partial compensation of incompleteness of formal axiomatics in the identification of the metal structure]. *Visnyk akademiyi nauk Ukrayiny* [Bulletin of the National Academy of Sciences of Ukraine]. 2014, no. 12, pp. 45–48. (in Ukrainian).
9. Bolshakov V.I., Volchuk V.M. and Dubrov Yu.I. *Topologicheskkiye i fraktal'nyye invarianty struktury dlya otsenki kachestva metalla* [Topological and fractal invariants of a structure to assess the quality of a metal]. *Dopovidi Natsionalnoi akademii nauk Ukrainy* [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine]. 2017, no. 4, pp. 42–48. (in Russian).
10. Bolshakov V.I. and Volchuk V.N. *Materialovedcheskiye aspekty primeneniya veyvletno-mul'tifraktal'nogo podkhoda dlya otsenki struktury i svoystv malouglerodistoy stali* [Material science aspects of the use of wavelet and multifractal approach for assessing of the structure and properties of low-carbon steel]. *Metallofizika i noveyshiyeh tekhnologiy* [Metal Physics and Advanced Technologies]. 2011, vol. 33, no 3, pp. 347–360. (in Russian).
11. Bolshakov V., Volchuk V. and Dubrov Yu. *Fractals and properties of materials*. Saarbrücken : Lambert Academic Publishing, 2016, 140 p.
12. Dubrov Yu., Bolshakov V. and Volchuk V. *Puti identifikatsii periodicheskikh mnogokriterial'nykh tekhnologiy* [Road periodic identification of multi-criteria Technology]. Saarbrücken : Palmarium Academic Publishing, 2015, 236 p.
13. Bolshakov V., Volchuk V. and Dubrov Yu. *Puti primeneniya teorii fraktalov* [Ways of applying the theory of fractals]. Saarbrücken : Palmarium Academic Publishing, 2016, 146 p.
14. Volchuk V.N. *K voprosu o primeneni teorii mul'tifraktalov dlya otsenki mekhanicheskikh svoystv metalla* [On the application of the theory of multifractals for the evaluation of the mechanical properties of a metal]. *Metallovedenie i termicheskaya obrabotka metallov* [Metall Science and Heat Treatment of Metals]. 2014, no. 3, pp. 12–19. (in Russian).
15. Bol'shakov V.I., Volchuk V.N. and Dubrov Yu.I. *Fraktaly v materialovedenii* [Fractals in materials]. Dnipropetrovsk : PSACEA, 2005, 253 p.
16. Bol'shakov V.I., Volchuk V.N. and Dubrov Yu.I. *Materialovedcheskiye aspekty primeneniya chastichnoy kompensatsii nepolnoty formal'noy aksiomatiki* [Material aspects of use of partial compensation of incompleteness of formal axiomatics]. *Visnyk Prydniprovskoyi derzhavnoyi akademiyi budivnytstva ta arkhitektury* [Bulletin of Prydniprov'ska State Academy of Civil Engineering and Architecture]. 2015, no. 5, pp. 10–16. (in Russian).
17. Bol'shakov V.I., Volchuk V.N. and Dubrov Yu.I. *Razrabotka i issledovaniye metoda opredeleniya mekhanicheskikh svoystv metalla na osnove analiza fraktal'noy razmernosti yego mikrostruktury* [Development and study of the method for determining the mechanical properties of a metal based on an analysis of the fractal dimension of its microstructure]. *Metallovedenie i termicheskaya obrabotka metallov* [Metall Science and Heat Treatment of Metals]. 2004, no. 1, pp. 43–54. (in Russian).
18. Bolshakov V.I. and Volchuk V.N. *Issledovaniye mikrostrukturnoy odnorodnosti stali U8 s primeneniye mul'tifraktal'nogo analiza* [Investigation of the microstructural uniformity of U8 steel with the use of multifractal analysis]. *Metallovedenie i termicheskaya obrabotka metallov* [Metall Science and Heat Treatment of Metals]. 2010, no. 4, pp. 31–38. (in Russian).
19. Bol'shakov V.I., Volchuk V.N. and Dubrov Yu.I. *K voprosu o postanovke zadachi identifikatsii fraktal'noy struktury metalla* [Statement on the issue of the problem identification of fractal metal structures]. *Visnyk Prydniprovskoyi derzhavnoyi akademiyi budivnytstva ta arkhitektury* [Bulletin of Prydniprov'ska State Academy of Civil Engineering and Architecture]. 2016, no. 5, pp. 35–39. (in Russian).
20. Hausdorff G. Dimension und auberes Mab. Math. Ann. 1919, vol. 79, pp. 157–179. (in Germany).

Поступила в редколлегию 03.07.2017 г.

Принята к печати 10.07.2017 г.