

УДК 519.21

DOI:10.30838/J.PMNTM.2413.240418.50.105

## ПРИМЕНЕНИЕ ФРАКТАЛЬНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРИ ОЦЕНКЕ СТРУКТУРЫ И СВОЙСТВ МЕТАЛЛОВ

БОЛЬШАКОВ В. И.<sup>1</sup>, *д. т. н., проф.*,  
 ВОЛЧУК В. Н.<sup>2\*</sup>, *д. т. н., доц.*,  
 ДУБРОВ Ю. И.<sup>3</sup>, *д. т. н., проф.*

<sup>1</sup> Кафедра материаловедения и обработки материалов, Государственное высшее учебное заведение «Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры», ул. Чернышевского, 24-а, Днепро, 49600, Украина, тел. +38 (0562) 47-39-56, e-mail: [bolshakov@mail.pgasa.dp.ua](mailto:bolshakov@mail.pgasa.dp.ua), ORCID ID: 0000-0003-0790-6473

<sup>2\*</sup> Кафедра материаловедения и обработки материалов, Государственное высшее учебное заведение «Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры», ул. Чернышевского, 24-а, Днепро, 49600, Украина, тел. +38 (0562) 47-39-56, e-mail: [volchuky@gmail.com](mailto:volchuky@gmail.com), ORCID ID: 0000-0001-7199-192X

<sup>3</sup> Кафедра материаловедения и обработки материалов, Государственное высшее учебное заведение «Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры», ул. Чернышевского, 24-а, Днепро, 49600, Украина, тел. +38 (0562) 47-39-56, e-mail: [mom@mail.pgasa.dp.ua](mailto:mom@mail.pgasa.dp.ua), ORCID ID: 0000-0002-3213-4893

**Аннотация.** Рассмотрены пути применения фрактального формализма при моделировании структуры и свойств материалов на основе разработанных алгоритмов для каждого конкретного случая. В качестве примеров приведены отдельные ранее опубликованные авторами стратегии, что позволяет не включать в текст статьи громоздкую формализацию общего направления фрактального моделирования.

*Ключевые слова:* фрактальное моделирование; математическая модель; микрообъект; макрообъект; структура; неполнота формальной аксиоматики; мультифрактал

## ЗАСТОСУВАННЯ ФРАКТАЛЬНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ДЛЯ ОЦІНЮВАННЯ СТРУКТУРИ І ВЛАСТИВОСТЕЙ МЕТАЛІВ

БОЛЬШАКОВ В. И.<sup>1</sup>, *д. т. н., проф.*,  
 ВОЛЧУК В. М.<sup>2\*</sup>, *д. т. н., доц.*,  
 ДУБРОВ Ю. И.<sup>3</sup>, *д. т. н., проф.*

<sup>1</sup> Кафедра металознавства та обробки матеріалів, Державний вищий навчальний заклад «Придніпровська державна академія будівництва та архітектури», вул. Чернишевського, 24-а, Дніпро, 49600, Україна, тел. +38 (0562) 47-39-56, e-mail: [bolshakov@mail.pgasa.dp.ua](mailto:bolshakov@mail.pgasa.dp.ua), ORCID ID: 0000-0003-0790-6473

<sup>2\*</sup> Кафедра металознавства та обробки матеріалів, Державний вищий навчальний заклад «Придніпровська державна академія будівництва та архітектури», вул. Чернишевського, 24-а, Дніпро, 49600, Україна, тел. +38 (0562) 47-39-56, e-mail: [volchuky@gmail.com](mailto:volchuky@gmail.com), ORCID ID: 0000-0001-7199-192X

<sup>3</sup> Кафедра металознавства та обробки матеріалів, Державний вищий навчальний заклад «Придніпровська державна академія будівництва та архітектури», вул. Чернишевського, 24-а, Дніпро, 49600, Україна, тел. +38 (0562) 47-39-56, e-mail: [mom@mail.pgasa.dp.ua](mailto:mom@mail.pgasa.dp.ua), ORCID ID: 0000-0002-3213-4893

**Анотація.** Розглянуто шляхи застосування фрактального формалізму для моделювання структури і властивостей матеріалів на основі розроблених алгоритмів для кожного конкретного випадку. Для прикладу наведено окремі раніше опубліковані авторами стратегії, що дозволило не включати в текст повідомлення громіздку формалізацію загального напрямку фрактального моделювання.

*Ключові слова:* фрактальне моделювання; математична модель; мікрооб'єкт; макрооб'єкт; структура; неповнота формальної аксіоматики; мультифрактал

## APPLICATION OF FRACTAL MODELLING AT THE ESTIMATION OF THE STRUCTURE AND PROPERTIES OF METALS

BOL'SHAKOV V.I.<sup>1</sup>, *Dr. Sc. (Tech.), Prof.*,  
 VOLCHUK V.M.<sup>2\*</sup>, *Dr. Sc. (Tech.), As. Prof.*

DUBROV Yu.I.<sup>3</sup>, *Dr. Sc. (Tech.), Prof.*

<sup>1</sup> Department of Materials Science, State Higher Education Establishment “Pridniprovsk State Academy of Civil Engineering and Architecture”, 24-a, Chernyshevskogo str., Dnipro, 49600, Ukraine, tel. +38 (0562) 47-39-56, e-mail: [bolshakov@mail.pgasa.dp.ua](mailto:bolshakov@mail.pgasa.dp.ua), ORCID ID: 0000-0003-0790-6473

<sup>2</sup> Department of Materials Science, State Higher Education Establishment “Pridniprovsk State Academy of Civil Engineering and Architecture”, 24-a, Chernyshevskogo str., Dnipro, 49600, Ukraine, tel. +38 (0562) 47-39-56, e-mail: [volchuky@gmail.com](mailto:volchuky@gmail.com), ORCID ID: 0000-0001-7199-192X

<sup>3</sup> Department of Materials Science, State Higher Education Establishment “Pridniprovsk State Academy of Civil Engineering and Architecture”, 24-a, Chernyshevskogo str., Dnipro, 49600, Ukraine, tel. +38 (0562) 47-39-56, e-mail: [mom@mail.pgasa.dp.ua](mailto:mom@mail.pgasa.dp.ua), ORCID ID: 0000-0002-3213-4893

**Abstract.** The ways of using fractal formalism in modelling the structure and properties of materials based on the developed algorithms for each specific case are considered. As examples, the separate strategies earlier published by the authors are given, which makes it impossible to include a cumbersome formalization of the general direction of fractal modelling in the article.

*Keywords:* fractal modelling; mathematical model; microobject; macroobject; structure; incompleteness of formal axiomatics; multifractal

Выводы Б. Мандельброта о применении теории фракталов наилучшим образом определяют организацию фрактального моделирования: «Хочу со всей категоричностью заявить, что я не считаю фрактальную точку зрения панацеей; анализ каждого случая должен оцениваться согласно критериям, принятым в соответствующей области (т. е., как правило, исходя из его способности организовать, объяснить и предсказать), а не рассматривать как очередной пример чисто математического построения» [1]. Тезис о том, что анализ каждого случая должен оцениваться согласно критериям, принятым в соответствующей области, является основополагающим.

Неадекватный выбор типа математической модели (ММ) для объекта моделирования приводит к потере её кардинальности, отражающейся на всех последующих изысканиях. Настоящее, вероятно, может происходить по вине исследователя, который иногда в «погоне» за относительно модным направлением назначает неадекватный объекту моделирования тип проектируемой ММ. Подобных ошибок, вероятно, можно избежать, если на стадии становления типа ММ будет применяться «графарет», примерная схема которого приведена на рисунке.

Общим для большинства синтезируемых фрактального типа ММ является сведение их к конечномерному виду<sup>1</sup>.

Как это следует из приведенной схемы рисунка, математическое программирование делится на разделы, применяющие методы планирования и управления в условиях полной информации и в

условиях неопределенности (стохастическое программирование) [2].

На пути создания ММ фрактального типа появляются трудности, связанные с задачами, для решения которых существующие методы математического программирования оказываются непригодными. Преодоление таковых исследователи нередко производят путём экспертного, эмпирико-технологического анализа обратных связей.

При этом изотропность пространства состояний, часто исследователи обосновывают ограничениями, допускающими экстраполяцию тенденций развития ММ в относительно узкой рабочей области [3].

Широкий спектр идентифицируемых объектов диктует представление их рабочих областей, как неэлементарных, неэргодических многообразий<sup>2</sup>, метрика которых представляется множеством координатных систем, связанных между собой произвольными, взаимно однозначными преобразованиями.

Для практических применений реализация подобной метрики является чрезвычайно сложной. Интерпретация подобных многообразий неоднозначная [4], что является основанием для введения процесса поиска стратегий, диктующих вид ММ.

Исходя из выше изложенного, в настоящей работе рассматриваются (предложены) стратегии моделирования ММ, для реализации которых необходимо учитывать следующее:

– ММ фрактального типа должна основываться на определении фрактала: «фракталом называется структура, состоящая из частей, которые в каком-то смысле подобны целому и друг другу» (Б. Мандельброт);

<sup>1</sup> При этом наблюдается разделение численных методов на *конечные*, которые позволяют получить решение за конечное число шагов, и *бесконечные*, в которых строится последовательность все более точных приближений к решению (получение решения с заданной точностью). Следует отметить, что большинство реальных задач не поддается точному решению.

<sup>2</sup> Для неэлементарного многообразия невозможно в целом ввести координатную систему с обычными требованиями взаимной однозначности и непрерывности соответствия.

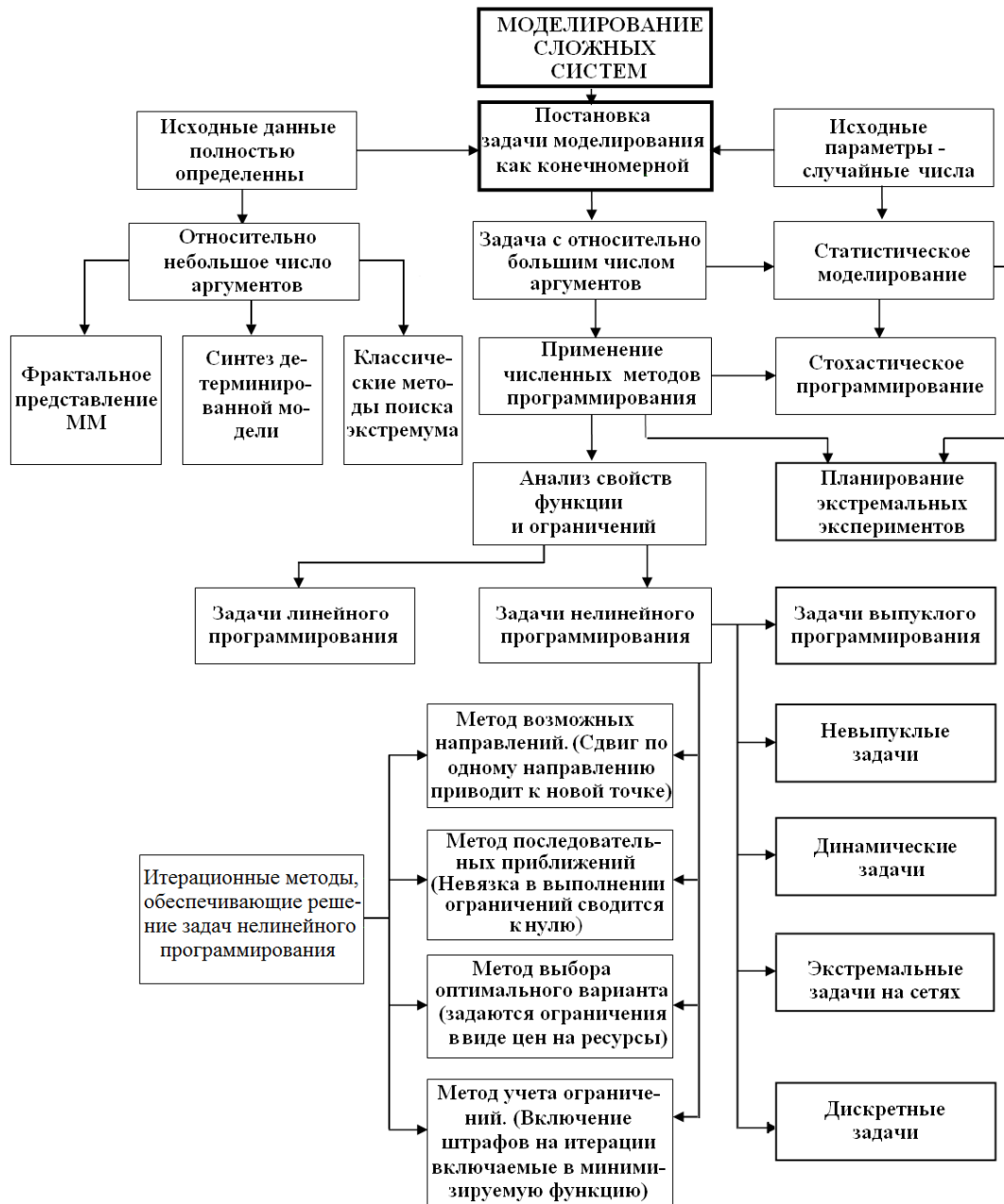


Рис. Схема применяемых методов математического моделирования / Fig. Scheme of applied methods of mathematical modeling

- начинать определение вида ММ необходимо с проверки выполнения условий, удовлетворяющих выполнению критериев Такенса [5] или Большакова – Дуброва [6];
- производится назначение определяющего параметра;
- выбор независимых и зависимых переменных с их предельными значениями;
- определяется фрактальная размерность структуры как:  $D = \log n / \log (1/r)$  [7], где  $n$  – число самоподобных частей, возникающих при увеличении линейных размеров исходной фигуры в  $r$  раз;  $D$  – фрактальная размерность;
- проверяется самоподобие фрактала [8–10];

- назначается масштаб проектируемой модели [11; 12];
  - проверяется однородность пространства состояний ММ;
  - производится выбор метода формирования вида ММ;
  - выбираются контрольные точки в пространстве состояний;
  - производится корректировка модели на основании анализа результатов экспериментов.
- Определение границ области самоподобия заключается в установлении допустимых изменений определяющего параметра, при которых наблюдается постоянство фундаментальных элементов области самоподобия.

Однородность пространства состояний присуща монофрактальным структурам [13–15], поскольку большинство структур в природе обладают фундаментальным свойством – геометрической регулярностью, известной как инвариантность по отношению к масштабу, или самоподобие. По-видимому, в силу того, что только одной величиной невозможно объективно описать сложную структуру, было введено понятие мультифрактала, который характеризуется спектром статистических размерностей Реньи [16]. В этой связи, у нелинейной модели пространство состояний представляет мультифрактал, выражающийся не в первичных геометрических формах, а в алгоритмах, т. е. наборах математических процедур [17; 18]. Для выбора способа формирования фрактальной модели допустимо применение любых математических методов.

Выбор точек в пространстве состояний делается для проверки адекватности ММ, корректировка которой производится на основании анализа результатов экспериментов.

Ниже рассматриваются примеры выбора стратегий решения задач фрактального моделирования, где основные стратегии базируются на создании фрактальных моделей *микрообъектов*. При этом встречаются задачи фрактального моделирования, применяющиеся для идентификации функции целей *макрообъектов*. Так, в работе [19] показана демонстрация применения фрактального формализма для идентификации *макрообъектов* и систем с частичным индетерминизмом, где определяющим параметром является фрактальная модель карусели Э. Лоренца, представленная отношением температуры воздушной массы в контрольных точках области самоподобия к ее скорости в этих точках. Другой задачей применения фрактального моделирования для *макрообъектов* является задача определения функции цели в зависимости от сложившейся ситуации на объекте моделирования, где в качестве альтернативных функций целей выступают критерии, характеризующие качество целевого продукта [20].

При реализации стратегий фрактального моделирования *микрообъектов* предлагается для

частичной компенсации неполноты формальной аксиоматики, проявляемой при идентификации, например, микроструктуры металла, применять язык более высокого уровня – фрактальную геометрию [21]. В работе [22] показано, что для определения принадлежности исследуемого объекта (микроструктуры металла) к фрактальному типу целесообразно применять критерий Такенса или Большакова – Дуброва, где выполнение условий, удовлетворяющих данным критериям, утверждает возможность применения моделей фрактального типа.

Для определения качества целевого продукта предложено применение фрактального моделирования [23], включающего:

- определение границ самоподобия, устанавливаемых в заданных интервалах;
- определение фрактальной размерности элементов структуры;
- вычисление спектра статистических размерностей мультифрактала;

– установление чувствительности согласно критерию Большакова – Дуброва, отображающей качество металла в его фрактальной размерности.

Для повышения точности фрактальной модели реализована методика, базирующаяся на применении композиции топологического и фрактального подходов для сотового, пластинчатого, зернистого и игольчатого классов структуры [24], где для оценки микроструктуры металла выбраны критерии: относительный диаметр зерна; относительная длина межфазных и внутрифазных границ; относительная дисперсия зерен и метрическое расхождение структуры с ее топологическим эквивалентом.

Одной из основных оценок качества металла является его неоднородность. В этой связи предложена и реализована методика, заключающаяся в применении концепции мультифрактального формализма, для оценки степени неоднородности микроструктуры металла [25].

Таким образом, организация фрактального моделирования инициируется с целью ее создания для каждого конкретного случая, что согласуется с приведенным тезисом Б. Мандельброта.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Mandelbrot B. V. The Fractal Geometry of Nature : monograph / [B. V. Mandelbrot]. – New-York, San Francisco : Freeman, 1982. – 480 p. – Режим доступа : <http://www.amazon.com/Fractal-Geometry-Nature-Benoit-Mandelbrot/dp/0716711869>
2. Основы организации фрактального моделирования : монография / [В. И. Большаков, В. Н. Волчук, Ю. И. Дубров]. – Киев : Академперіодика НАН України, 2017. – 170 с.
3. Большаков В. И. Организация фрактального моделирования / В. И. Большаков, В. Н. Волчук, Ю. И. Дубров // Доповіді НАН України. – 2018. – № 6. – С. 67–72. – Режим доступа : <https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.06.067>
4. Ланге О. Целое и развитие в свете кибернетики. Исследование по общей теории систем / О. Ланге. – Москва : Прогресс, 1969. – С. 181–252.
5. Takens F. Detecting strange attractors in turbulence. Dynamical Systems and Turbulence. Lecture Notes in Mathematics / F. Takens. Editors : D.A. Rand and L.-S. Young. – Berlin-Heidelberg : Springer-Verlag, 1981. – Vol. 898. – Pp. 366–381.
6. Большаков В. И. Об оценке применимости языка фрактальной геометрии для описания качественных трансформаций материалов / В. И. Большаков, Ю. И. Дубров // Доповіді НАН України. – 2002. – № 4. – С. 116–121.
7. Большаков В. И., Дубров Ю. И., Криулін Ф. В., Волчук В. М. Патент на винахід № 51439А. Спосіб визначення фрактальної розмірності зображення. – Бюл. № 11. – 15.11.2002.

8. Fractals and properties of materials : monograph / [V. Bol'shakov, V. Volchuk, Yu. Dubrov] – Saarbrücken : Lambert Academic Publishing, 2016. – 140 p. – Режим доступа : <https://www.lap-publishing.com/catalog/details/store/tr/book/978-3-330-01812-9/fractals-and-properties-of-materials?search=Fractals>
9. Пути применения теории фракталов : монография / [В. Большаков, В. Волчук, Ю. Дубров]. – Saarbrücken : Palmarium Academic Publishing, 2016. – 146 с. – Режим доступа : <https://www.palmarium-publishing.ru/extern/listprojects>
10. Большаков В. И. Фракталы в материаловедении : учебное пособие / [В. И. Большаков, В. Н. Волчук, Ю. И. Дубров] Днепропетровск : ПГАСА, 2006. – 253 с.
11. Большаков В. И. Адекватный масштаб представления структуры металла для идентификации его механических свойств с применением языка фрактальной геометрии / В. И. Большаков, В. Н. Волчук, Ю. И. Дубров // Компьютерное материаловедение и обеспечение качества : матер. к 46-му Междунар. сем. по моделированию и оптимизации композитов. – Одесса : АстроПринт, 2007. – С. 189–191.
12. Большаков В. И. Выбор масштабного представления структуры металла для определения его механических свойств с применением фрактальных размерностей / В. И. Большаков, В. Н. Волчук, Ю. И. Дубров // Строительство, материаловедение, машиностроение. – 2007. – Вып. 41, ч. 2. – С. 55–58.
13. Волчук В. Н. Разработка и исследование метода определения качественных характеристик металла на основе анализа фрактальной размерности его микроструктуры : дисс. на соиск. учен. степ. канд. техн. наук : 05.02.01 / Волчук Владимир Николаевич. – Днепропетровск, 2003. – 186 с.
14. Большаков В. И. Разработка и исследование метода определения механических свойств металла на основе анализа фрактальной размерности его микроструктуры / В. И. Большаков, В. Н. Волчук, Ю. И. Дубров // Металознавство та термічна обробка металів. – 2004. – № 1. – С. 43–54.
15. Большаков В. И. К вопросу о постановке задачи идентификации фрактальной структуры металла / В. И. Большаков, В. Н. Волчук, Ю. И. Дубров // Вісник Придніпровської державної академії будівництва та архітектури. – 2016. – № 5. – С. 35–39. – Режим доступа : <http://visnyk.pgasa.dp.ua/article/view/68905/63995>
16. Rényi A. Probability Theory / [A. Rényi]. – Amsterdam : The Netherlands North-Holland, 1970. – 670 p.
17. Большаков В. И. Особенности применения мультифрактального формализма в материаловедении / В. И. Большаков, В. Н. Волчук, Ю. И. Дубров // Доповіді НАН України. – 2008. – № 11. – С. 99–107. – Режим доступа : <http://www.dopovidi.nas.gov.ua/2008-11/08-11-17.pdf>
18. Volchuk V. Method of material quality estimation with usage of multifractal formalism / V. Volchuk, I. Klyumenko, S. Kroviakov, M. Orešković // Tehnički glasnik – Technical Journal. – 2018. – Vol. 12. – № 2. – Pp. 93–97. – Режим доступа : <https://hrcak.srce.hr/202359>
19. Большаков В. И. Фрактальный подход при идентификации сложных систем / В. И. Большаков, В. Н. Волчук, Ю. И. Дубров // Доповіді НАН України. – 2017. – № 6. – С. 46–50. – Режим доступа : <https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.06.00>
20. Волчук В. Н. К применению фрактального формализма при ранжировании критериев качества многопараметрических технологий / В. Н. Волчук // Металлофизика и новейшие технологии. – 2017. – Т. 39. – № 3. – С. 949–957. – Режим доступа : <http://mfint.imp.kiev.ua/ru/abstract/v39/i07/0949.html>
21. Большаков Вад. І. Часткова компенсація неповноти формальної аксіоматики при ідентифікації структури металу / Вад. І. Большаков В. І. Большаков, В. М. Волчук, Ю. І. Дубров // Вісник НАН України. – 2014. – № 12. – С. 45–48. – Режим доступу : <http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/73434>
22. Большаков В. И. К определению метрики объекта идентификации / В. И. Большаков, В. Н. Волчук, Ю. И. Дубров // Металознавство та термічна обробка металів. – 2016. – № 4. – С. 10–14. Режим доступа : <http://mtom.pgasa.dp.ua/article/view/10-14/85306>
23. Дубров Ю. Пути идентификации периодических многокритериальных технологий : монография / [Ю. Дубров, В. Большаков, В. Волчук]. – Saarbrücken : Palmarium Academic Publishing, 2015. – 236 с. – Режим доступа : <https://www.palmarium-publishing.ru/extern/listprojects>
24. Большаков В. И. Топологические и фрактальные инварианты структуры для оценки качества металла / В. И. Большаков, В. Н. Волчук, Ю. И. Дубров // Доповіді НАН України. – 2017. – № 4. – С. 42–48. – Режим доступа : <https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.04.00>
25. Большаков В. И. Материаловедческие аспекты применения вейвлетно-мультифрактального подхода для оценки структуры и свойств малоуглеродистой стали / В. И. Большаков, В. Н. Волчук // Металлофизика и новейшие технологии. – 2011. – Т. 33. – № 3. – С. 347–360.

## REFERENCES

1. Mandelbrot B.B. The Fractal Geometry of Nature. New-York, San Francisco : Freeman, 1982, 480 p. (in English)
2. Bol'shakov V.I., Volchuk V.M. and Dubrov Yu.I. *Osnovy organizacii fraktal'nogo modelirovaniya* [Fundamentals of fractal modeling]. Kyiv, Ukraine : PH "Akademperiodyka" National Academy of Sciences of Ukraine, 2017, 170 p. (in Russian).
3. Bol'shakov V.I., Volchuk V.M. and Dubrov Yu.I. *Organizatsiya fraktal'nogo modelirovaniya* [Organization of fractal modeling]. *Dopovidi Natsionalnoi akademii nauk Ukrainy* [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine]. 2018, no. 6, pp. 67–72. (in Russian).
4. Lange. O. *Celoe i razvitie v svete kibernetiki. Issledovanie po obschej teorii sistem* [Wholes and Parts. A General Theory of System Behaviour]. Oxford : Pergamon Press, 1965, 74 p. (in Russian).
5. Takens F. Detecting strange attractors in turbulence. *Dynamical Systems and Turbulence. Lecture Notes in Mathematics*. Editors : D.A. Rand and L.-S. Young. Berlin-Heidelberg : Springer-Verlag, 1981, pp. 366–381.
6. Bol'shakov V.I. and Dubrov Yu.I. *Ob otsenke primenimosti yazyka fraktal'noy geometrii dlya opisaniya kachestvennykh transformatsiy materialov* [An estimate of the applicability of fractal geometry to describe the language of qualitative transformation

- of materials]. *Dopovidi Natsionalnoi akademii nauk Ukrainy* [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine]. 2002, no. 4, pp. 116–121. (in Russian).
7. Bol'shakov V.I., Dubrov Yu.I., Kryulin F.V. and Volchuk V.N. *Sposib vyznachennya fraktal'noyi rozmirnosti zobrazhennya* [Method for Determining the Dimensionality of Images]. Patent product no. 51439A, UA. MPK 7 G06K9/00, bulletin no. 11, 2002. (in Ukrainian).
8. Bol'shakov V., Volchuk V. and Dubrov Yu. *Fractals and properties of materials*. Saarbrücken : Lambert Academic Publishing, 2016, 140 p.
9. Bol'shakov V., Volchuk V. and Dubrov Yu. *Puti primeneniya teorii fraktalov* [Ways of applying the theory of fractals]. Saarbrücken : Palmarium Academic Publishing, 2016, 146 p. (in Russian).
10. Bol'shakov V.I., Volchuk V.N. and Dubrov Yu.I. *Fraktaly v materialovedenii* [Fractals in materials]. Dnepropetrovsk : PSACEA, 2005, 253 p. (in Russian).
11. Bol'shakov V.I. *Adekvatnyy masshtab predstavleniya struktury metalla dlya identifikatsii yego mekhanicheskikh svoystv s primeneniym yazyka fraktal'noy geometrii* [Adequate scale representation of the structure of the metal to identify its mechanical properties using the language of fractal geometry]. *Komp'yuternoye materialovedeniye i obespecheniye kachestva : mater. 46 mezhdunar. sem. po modelirovaniyu i optimizatsii kompozitov* [Computer Material Science and Quality Assurance : mater. of 46th international. sem. on modeling and optimization of composites]. Odessa : AstroPrint, 2007, pp. 189–191. (in Russian).
12. Bol'shakov V.I., Volchuk V.N. and Dubrov Yu.I. *Vybor masshtabnogo predstavleniya struktury metalla dlya opredeleniya yego mekhanicheskikh svoystv s primeneniym fraktal'nykh razmernostey* [Choosing a scale representation of the metal structure to determine its mechanical properties using fractal dimensions]. *Stroitel'stvo, materialovedenie, mashynostroenie* [Building, materials science, mechanical engineering]. 2007, no. 41, part 2, pp. 55–58. (in Russian).
13. Volchuk V.M. *Rozroblennia i doslidzhennia metodu vyznachennia yakisnykh kharakterystyk metalu na osnovi analizu fraktalnoi rozmirnosti yoho mikrostruktury*. [Development and research of the method for determining the qualitative characteristics of a metal on the basis of an analysis of the fractal dimension of its microstructure]. *Diss. na soisk. uchen. step. kand. tehn. nauk : 05.02.01* [Candidate Dissertation for Technical Sciences (05.02.01 – Materials Science)]. Dnipropetrovsk. 2003, 186 p. (in Ukrainian).
14. Bol'shakov V.I., Volchuk V.N. and Dubrov Yu.I. *Razrabotka i issledovaniye metoda opredeleniya mekhanicheskikh svoystv metalla na osnove analiza fraktal'noy razmernosti yego mikrostruktury* [Development and study of the method for determining the mechanical properties of a metal based on an analysis of the fractal dimension of its microstructure]. *Metallovedenie i termicheskaya obrabotka metallov* [Metall Science and Heat Treatment of Metals]. 2004, no. 1, pp. 43–54. (in Russian).
15. Bol'shakov V.I., Volchuk V.N. and Dubrov Yu.I. *K voprosu o postanovke zadachi identifikatsii fraktal'noy struktury metalla* [Statement on the issue of the problem identification of fractal metal structures]. *Visnyk Prydniprovskoyi derzhavnoyi akademiyi budivnytstva ta arkhitektury* [Bulletin of Prydniprovsk'a State Academy of Civil Engineering and Architecture]. 2016, no. 5, pp. 35–39. (in Russian).
16. Rényi A. *Probability Theory*. Amsterdam : The Netherlands North-Holland, 1970, 670 p.
17. Bolshakov V.I., Volchuk V.N. and Dubrov Yu.I. *Osobennosti primeneniya mul'tifraktal'nogo formalizma v materialovedenii* [Features of the multifractal formalism in materials]. *Dopovidi Natsionalnoi akademii nauk Ukrainy* [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine]. 2008, no. 11, pp. 99–107. (in Russian).
18. Volchuk V., Klymenko I., Kroviakov S. and Orešković M. *Method of material quality estimation with usage of multifractal formalism*. *Tehnički glasnik - Technical Journal*, 2018, vol. 12, no. 2, pp. 93–97. (in English).
19. Bolshakov V.I., Volchuk V.M. and Dubrov Yu.I. *Fraktal'nyy podkhod pri identifikatsii slozhnykh sistem* [Fractal approach to the identification of complex systems]. *Dopovidi Natsionalnoi akademii nauk Ukrainy* [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine]. 2017, no. 6, pp. 46–50. (in Russian).
20. Volchuk V.M. *K primeneniyu fraktal'nogo formalizma pri ranzhirovanii kriteriyev kachestva mnogoparametricheskikh tekhnologiy* [On the Application of Fractal Formalism for Ranging Criteria of Quality of Multiparametric Technologies]. *Metallofizika i noveyshiye tekhnologii* [Metal Physics and Advanced Technologies]. 2017, vol. 39, no 3, pp. 949–957. (in Russian).
21. Bol'shakov Vad.I., Bolshakov V.I., Volchuk V.N. and Dubrov Yu.I. *Chastkova kompensatsiya nepovnoty formal'noyi aksiomatky pry identyfikatsiyi struktury metalu* [The partial compensation of incompleteness of formal axiomatics in the identification of the metal structure]. *Visnyk akademiyi nauk Ukrayiny* [Bulletin of the National Academy of Sciences of Ukraine]. 2014, no. 12, pp. 45–48. (in Ukrainian).
22. Bol'shakov V.I., Volchuk V.N. and Dubrov Yu.I. *K opredeleniyu metriki ob"yektu identifikatsii* [To the definition of the identity metric]. *Metallovedenie i termicheskaya obrabotka metallov* [Metall Science and Heat Treatment of Metals]. 2016, no. 4, pp. 10–14. (in Russian).
23. Dubrov Yu., Bolshakov V. and Volchuk V. *Puti identifikatsii periodicheskikh mnogokriterial'nykh tekhnologiy* [Road periodic identification of multi-criteria Technology]. Saarbrücken : Palmarium Academic Publishing, 2015, 236 p. (in Russian).
24. Bolshakov V.I., Volchuk V.M. and Dubrov Yu.I. *Topologicheskkiye i fraktal'nyye invarianty struktury dlya otsenki kachestva metalla* [Topological and fractal invariants of a structure to assess the quality of a metal]. *Dopovidi Natsionalnoi akademii nauk Ukrainy* [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine]. 2017, no. 4, pp. 42–48. (in Russian).
25. Bolshakov V.I. and Volchuk V.N. *Materialovedcheskiye aspekty primeneniya veyvletno-mul'tifraktal'nogo podkhoda dlya otsenki struktury i svoystv malouglerodistoy stali* [Material science aspects of the use of wavelet and multifractal approach for assessing of the structure and properties of low-carbon steel]. *Metallofizika i noveyshiye tekhnologii* [Metal Physics and Advanced Technologies]. 2011, vol. 33, no 3, pp. 347–360. (in Russian).

Поступила в редакцию 13.02.2018

Принята к печати 20.02.2018